

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Директор Высшей школы**  
**современной математики**  
**А.Н. Соболевский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Дзета-функция Римана
<b>по направлению:</b>	Математика
<b>профиль подготовки:</b>	Фундаментальная математика
	Высшая школа современной математики
	Высшая школа современной математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 84 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 144, всего зач. ед.: 4

Программу составил: М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

## Аннотация

Многие классические и современные вопросы теории чисел сводятся к свойствам дзета-функции Римана и её аналогов, таких как L-функции Дирихле. Отчасти это объясняется тем, что ряды Дирихле – наиболее естественный тип производящих функций для последовательностей со свойством мультипликативности. В данном курсе мы в основном сосредоточимся на дзета-функции Римана, её связи с простыми числами, а также аналитических свойствах, таких как универсальность Воронина.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Формирование базовых знаний по теории дзета-функции Римана; формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

#### Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области алгебраической теории чисел и теории дзета-функции Римана;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении алгебраико-теоретико-числовых методов в других математических дисциплинах.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Основные теоретические факты, касающиеся дзета-функции Римана (классическое определение и различные определения в алгебраической геометрии).

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с различными вариантами дзета-функции Римана.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Дзета-функция, её аналитическое продолжение и функциональное уравнение.	6			18
2	Проблема делителей Дирихле и её аналоги.	6			18
3	Дзета и простые числа.	6			18
4	Плотностные теоремы.	6			15
5	Большие значения дзета-функции.	6			15
Итого часов		30			84
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		144 час., 4 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

###### 1. Дзета-функция, её аналитическое продолжение и функциональное уравнение.

Суммирование по частям.

Ряды Дирихле.

Дзета-функция, её аналитическое продолжение и функциональное уравнение.

L-функции Дирихле. тау-функция Рамануджана.

###### 2. Проблема делителей Дирихле и её аналоги.

Формула Перрона.

Проблема делителей Дирихле и её аналоги.

Формула Вороного.

###### 3. Дзета и простые числа.

Дзета и простые числа.

Границы нулей, формула Римана-Мангольдта.

Гипотеза Римана.

Корреляции нулей и случайные матрицы.

###### 4. Плотностные теоремы.

Приближённое функциональное уравнение, средние рядов Дирихле и плотностные теоремы.

Плотностная гипотеза.

Простые числа в коротких интервалах.

Теорема Сельберга о промежутках между простыми числами.

5. Большие значения дзета-функции.

Большие значения дзета-функции.

Теорема универсальности Воронина.

Случайные голоморфные функции.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

## **6. Перечень рекомендуемой литературы**

Основная литература

1. Основы алгебраической геометрии, [учеб. пособие для вузов] /И. Р. Шафаревич. Москва, МЦНМО, 2018

Дополнительная литература

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<https://old.mccme.ru/iur/courses.php>

<https://library.mccme.ru/>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

**по направлению:** Математика  
**профиль подготовки:** Фундаментальная математика  
Высшая школа современной математики  
Высшая школа современной математики  
**курс:** 3  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

**Разработчик:** М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дзета-функция Римана» обучающийся должен:

### знать:

Основные теоретические факты, касающиеся дзета-функции Римана (классическое определение и различные определения в алгебраической геометрии).

### уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

### владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с различными вариантами дзета-функции Римана.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Суммирование по частям. Ряды Дирихле. Дзета-функция, её аналитическое продолжение и функциональное уравнение. L-функции Дирихле. тау-функция Рамануджана.
2. Формула Перрона. Проблема делителей Дирихле и её аналоги. Формула Вороного.
3. Дзета и простые числа. Границы нулей, формула Римана-Мангольда. Гипотеза Римана. Корреляции нулей и случайные матрицы.
4. Приближённое функциональное уравнение, средние рядов Дирихле и плотностные теоремы. Плотностная гипотеза. Простые числа в коротких интервалах. Теорема Сельберга о промежутках между простыми числами.
5. Большие значения дзета-функции. Теорема универсальности Воронина. Случайные голоморфные функции.

Пример экзаменационного билета:

- 1) Тау-функция Рамануджана.
- 2) Плотностная гипотеза.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.